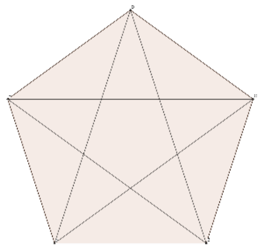
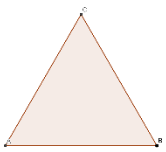
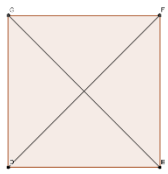
Dati cinque punti nel piano, in modo che a tre a tre non siano allineati, quante rette passanti per due di questi punti è possibile tracciare? Sai esprimere il legame generale tra il numero N di punti ed il numero M di rette che si possono tracciare?



Nel rappresentare sul piano cinque punti a tre a tre non allineati e le rette passanti ci si accorge che, equivalentemente, è possibile tracciare poligono, in questo caso un pentagono. Dunque in luogo a rette si utilizzano i (più comodi) segmenti che passano per ciascuna coppia di punti. In questo modo otteniamo un pentagono (cinque vertici e lati) regolare, e le proprie cinque diagonali. Dunque un totale di **dieci** rette passanti. Per non rovinare subito la sorpresa restiamo a tema e disegniamo altre due figure regolari, come abbiamo fatto per il pentagono. Il quadrilatero regolare, con quattro vertici e lati e le sue due diagonali: totale **sei**. Ovviamente il triangolo equilatero non avendo diagonali, con i suoi tre lati e vertici, consta di sole **tre** rette passanti. Potremmo andare avanti a questo punto e prendere in esame l'esagono regolare, l'eptagono, ecc., ecc.… per contare lati e diagonali, all'infinito. Invece mettiamo in tabella alcuni risultati ottenuti, vedendo se da essi possiamo ricavarne degli altri e fare delle congetture al riguardo.



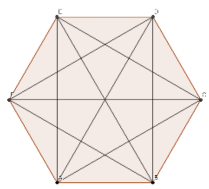


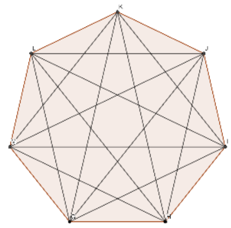
Punti	Rette
3	3
4	6
5	10

Passando da tre a quattro punti notiamo che si aggiungono tre rette: è chiaro che ciascun punto deve "agganciarsi" a tutti gli altri rimanenti. Nel triangolo il punto A deve "agganciarsi" ai punti B e C, il punto B solamente al punto C; ciò perché BA e AB sono la stessa cosa: qui l'ordine non ha importanza! Abbiamo pertanto $2+1=3$ collegamenti. Allo stesso modo nel quadrato abbiamo DE, DF, DG; EF, EG e FG. Partendo con D, esso si connette per tre volte a punti distinti, il punto E per due volte mentre al punto F resta un solo collegamento, in numeri: $3+2+1=6$. Ancora, per cinque punti: $4+3+2+1=10$. Da queste semplici constatazioni desumiamo che il legame che richiede l'esercizio di esprimere ha sicuramente a che fare con una qualche progressione aritmetica. C'era d'aspettarselo: aggiungiamo un punto, e poi un altro e poi un altro… siamo noi stessi causando la progressione! Di conseguenza dovrebbe esserci un legame fra ciascuna coppia (Numero di punti, Numero di rette) e quella successiva (precedente) a seconda di come le vediamo.

Facciamo un utile digressione: la più semplice delle progressioni aritmetiche è la somma fra i primi n numeri naturali. Senza dimostrarlo, come notò Johann Friedrich Carl Gauss, sappiamo che:

$$1+2+3+4+\cdots+n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad (0)$$





Raccogliamo ora altri dati sempre in tabella.

Coppia	Punti	Rette
1	3	3
2	4	6
3	5	10
4	6	15
5	7	21

Appare abbastanza chiaro che non potremo andare avanti a lungo nel tracciare e contare rette… altrimenti il quesito ci annienterà: man mano che i punti aumentano diventa sempre più difficile individuare e contare rette: provate con 10 punti! E che ne pensate di 100? Occorre una formula.

Ma prima osserviamo la tabella con le dovute attenzioni. Si nota che la somma di ciascuna coppia (punti, rette) è uguale al numero di rette della coppia successiva: per esempio la prima coppia in tabella (3,3) dà quale somma 6, come il numero di rette passanti per 4 punti. Allo steso modo la coppia due (4,6) che dà 10, è il numero di rette che passano per 5 punti… e così via. Se è così, allora il numero di rette passanti per n punti è dato dalla somma numerica della coppia precedente alla coppia che contiene n. Ovverosia, in formula:

$$R_n = (n-1) + R_{n-1} \quad (1)$$

Provando ad applicare la (1) ad otto punti a tre a tre non allineati:

$$R_8 = (8-1) + R_{8-1}$$

Che risulta:

$$R_8 = (8 - 1 + R_7) = 7 + R_7 = 7 + (7 - 1 + R_6) = 7 + 6 + (6 - 1 + R_5) =$$
$$= 7 + 6 + 5 + (5 - 1 + R_4) = 7 + 6 + 5 + 4 + (4 - 1 + R_3) = 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + R_3$$

Sappiamo che $R_3 = 3 = 2 + 1$, quindi otteniamo esattamente quanto ci aspettavamo:

$$R_8 = 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28$$

Dà 28 come la somma numerica della quinta coppia della tabella precedente (7,21): questo risultato ci permette di acquisire maggiore sicurezza rispetto alla congettura fatta osservando i numeri in tabella. Ciò è un risultato ma non una prova, non una dimostrazione. Possiamo dimostrare che tale formula sia vera (o smentirla) tramite il principio di induzione su $\mathbb{N}$.

Si suppone che la proprietà P(n) sia vera per n, quindi supposta vera la (1), $R_n = (n-1) + R_{n-1}$, (base dell'induzione), occorre verificare se valga anche P(n+1), ossia R_{n+1} (passo induttivo), procediamo. Se è vero, allora sarà $\forall n \in \mathbb{N}[P_n]$.

Prima di procedere chiediamoci cosa ci aspettiamo. Abbiamo notato in precedenza che se passiamo, per esempio, da quattro a cinque punti, il numero di rette passanti aumenta di 4, ovvero quando da $k = 4$ si passa a $k + 1 = 5$ sappiamo che è sufficiente aggiungere $k = 4$ nuove rette a quelle precedenti, infatti se $R_4 = 6$ ed $R_5 = 10$ la differenza $R_5 - R_4 = 4$ ovvero k. Allo stesso modo dovremo verificare se passando da n ad n+1 punti il numero di rette verrà incrementato esattamente di n, la differenza $R_{n+1} - R_n$.

Base dell'induzione

Abbiamo già verificato che per n=8 vale $R_8 = (8-1) + R_{8-1}$ dunque supponiamo vera la

$$R_n = (n-1) + R_{n-1}$$

Che risulta essere:

$$R_n = (n-1) + (n-2) + (n-3) + \cdots + 3 + 2 + 1$$

Passo induttivo

Per n+1, a questo punto:

$$R_{n+1} = n + (n - 1 + R_{n-1}) \ldots = \cdots n + (n-1) + (n-2) + (n-3) + (n-4) \ldots + \cdots (n - n + 3) + R_3$$

Dove sappiamo

$$R_3 = 3 = 2 + 1$$

Dunque risulta:

$$R_{n+1} = n + (n-1) + (n-2) + (n-3) + \cdots + 3 + 2 + 1 = n + R_n$$

Come si vede il numero di rette è aumentato di n, infatti $R_{n+1} = n + R_n$ Q.E.D.

A questo punto potremmo concludere qui, salvo il fatto che la (1) ci dice solamente tutti i termini da sommare fra loro. Se i punti sono 1000 dovremo sommare tutti i termini compresi fra 999 e 1 ovvero, visti in ordine crescente, faremo $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + 997 + 998 + 999$ ma comunque ci toccherà eseguire una lunga somma: scomodo! Si tratta in ogni caso di una progressione aritmetica come la (0). Prima di arrivare a conclusione, notiamo ancora per mezzo di una tabella alcune altre importanti cose:

Punti	Rette	Somma della coppia (punti,rette)
0	0	0
1	0	1
2	1	3
3	3	6
4	6	10
5	10	15
6	15	21
7	21	28
8	28	36
9	36	45
10	45	55
11	55	66
12	66	78
13	78	91
14	91	105
15	105	120
16	120	136

Sappiamo dalla (0) che la somma dei primi n numeri naturali è data da:

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

Che non fa esattamente al caso nostro in quanto, come si nota dalla tabella, il numero di rette è “spostato” verso il basso di una posizione rispetto alla somma della coppia (punti, rette). La somma della coppia (punti, rette) rappresenta, infatti, la somma dei primi n numeri naturali dove il numero di punti rappresenta n. Dire che è “spostato verso il basso di una posizione” significa per “perde” 1 rispetto alla somma dei primi n numeri.

Per “adattare” la (0) al nostro caso è sufficiente sottrarre 1 a tutti i termini da sommare:

$$(1-1)+(2-1)+(3-1)+(4-1)+\cdots+(\mathrm{n}-1)$$

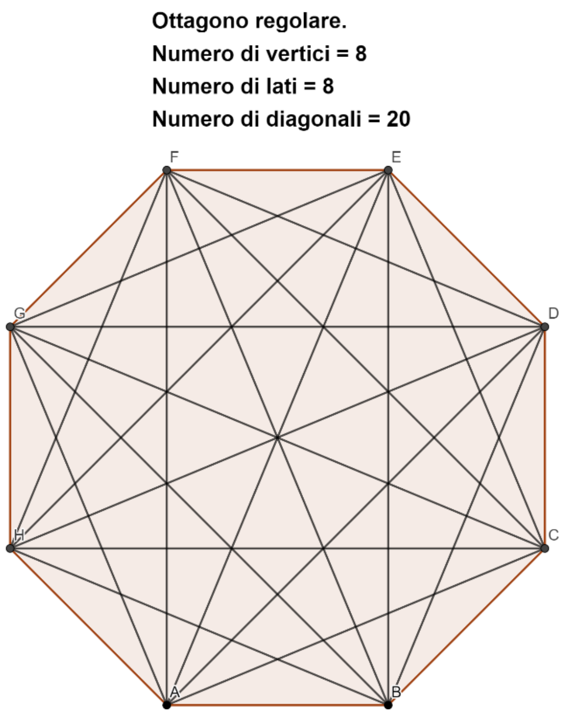
Ovvero, molto semplicemente:

$$\frac{n-1(n+1-1)}{2}=\frac{(n-1)(n)}{2}$$

Allora il numero R_n delle rette passanti per n punti è dato da:

$$\mathrm{R_n}=\frac{\mathrm{n(n-1)}}{2} \qquad (2)$$

Ciò significa dire: il numero di rette R_n passanti per n punti dati è uguale alla metà del numero dei punti moltiplicato per la differenza fra il numero dei punti e l’unità.



Abbiamo visto che determinare il numero di rette passanti per n punti a tre a tre non allineati equivale a fare la somma dei lati e delle diagonali di un poligono avente n vertici. Interessante è ora notare che se dal totale sottraiamo il numero dei lati ciò che si ottiene è il numero di diagonali. Così se il rettangolo ha quattro lati, ha anche due diagonali. La somma dei lati e delle diagonali è sei, come le rette passanti dell'esercizio appena risolto.

Siano *d* ed *n*, rispettivamente, il numero di diagonali e di lati di un poligono. Sottraendo *n* dalla (2) abbiamo che:

$$d = R_n - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-1) - 2n}{2}$$

Dalla quale otteniamo

$$d = \frac{n(n-3)}{2} \qquad (3)$$